



TITLE:

デジタル量子コンピュータ開発の 進展と課題 (量子システム推定の数 理)

AUTHOR(S):

杉山, 太香典

CITATION:

杉山, 太香典. デジタル量子コンピュータ開発の進展と課題 (量子システム推定の数理). 数理解析研究所講究録 2017, 2059: 1-12

ISSUE DATE:

2017-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/237209>

RIGHT:

デジタル量子コンピュータ開発の進展と課題

東京大学 先端科学技術研究センター 杉山 太香典

Takanori Sugiyama

Research Center for Advanced Science and Technology,
The University of Tokyo.

概要

量子コンピュータとは量子系の性質を積極的に利用して計算を行う装置の1種である。量子コンピュータを用いることにより、特定の問題に対して既存のコンピュータよりも高速に（問題によっては指数関数的に速く）解を求められることが理論的に示されている。現在実現している量子コンピュータは搭載している量子ビット数が16程度と小規模であり、既存のコンピュータと同規模の問題を扱うには、量子誤り訂正符号とよばれるエラー対策方法を導入し、その上でシステムの大規模化と演算のさらなる高精度化が必要となる。本稿では特に超伝導量子回路による量子コンピュータの開発状況を概説し、開発における理論的な課題について説明する。

キーワード：量子コンピュータ

1 序

量子コンピュータとは、量子系の性質を積極的に利用して計算を行う装置の1種であり、素因数分解 [1] や量子多体系のシミュレーション [2, 3, 4] を含む様々な問題を既存のコンピュータよりも高速に解けることが理論的に示されている [5, 6]。そのような高速な計算を実現するために、世界各国の大学・研究所や Google・IBM・Microsoft・Intel などの企業で量子コンピュータの実用化に向けた研究が進められている。

量子コンピュータの計算モデルには回路型・測定型・断熱型など様々なものが提案されている。本稿では断りのない限り回路型に基づく量子コンピュータについて説明しているものとする。量子計算では、量子ビットと呼ばれる2準位系を多数用意し、それらに量子演算と呼ばれる演算処理を適切な順序で実行していくことで計算が遂行される。量子演算は量子ビットの状態の初期化（または状態準

備), ゲート演算, 測定の3つに大別される。ゲート演算は基本ゲート演算と呼ばれる1量子ビットへのユニタリ操作と2量子ビットへのユニタリ操作を組み合わせることで実現される。量子演算の最後に測定を行い, 得られた測定値をデータ処理することで計算結果が得られる。

一般に量子系はそのままでは環境系の影響(デコヒーレンス)を受けやすく, 計算のリソースとなる量子的なコヒーレンスを容易に失ってしまう。また, 量子演算には実験装置のもつ不完全性に起因するエラーが必ず含まれるため, 量子演算を繰り返し実行するとエラーの蓄積と伝搬が生じてしまう。これらの問題を解決するために, 量子コンピュータでは量子誤り訂正[7, 8, 9]とよばれるエラー対策方法を導入する。量子誤り訂正では, 複数の量子ビットからエラー耐性のある量子ビットを構成する。この構成手法を量子誤り訂正符号と呼ぶ。もともとの量子ビットを物理量子ビット, 量子誤り訂正符号によって構成されるエラー耐性を持った量子ビットを論理量子ビットと呼ぶ。誤り訂正は構成する物理量子ビットにエラー検出用の演算とその結果に応じた訂正用の演算を行うことで実行される。誤り訂正のために実行される量子演算にもエラー(物理エラー)は含まれるが, その強さがある値よりも小さければ, 論理量子ビットを構成する物理量子ビットの数を増やすことで, 論理量子ビット上に生じるエラー(論理エラー)の大きさを削減できることが理論的に示されている。この性質は閾値定理と呼ばれ, 物理エラーの大きさが一定であったとしてもその大きさが閾値を下回っていれば, 物理量子ビットの数を犠牲にすることで論理量子ビットの性能を任意に改善できることを保証している。閾値の具体的な値は量子誤り訂正符号の種類や物理エラーモデルの選び方によって異なる。理論上は, 物理エラーの大きさが閾値よりも少しでも小さければ, 物理量子ビットも数を増やすことで論理エラーをいくらか小さくすることが可能である。しかし実際の実験では物理量子ビットの数は限られており, 1つの論理量子ビットに割り当てる物理量子ビットの数はできるだけ少なくすることが望ましい。1つの論理量子ビットに割り当てる物理量子ビットの数は, 物理エラーの大きさと要求される論理エラーの大きさによって決まる。割り当てる物理量子ビットの数を少なくするためには物理エラーを小さくすることが求められる。物理エラーの大きさが閾値よりも十分小さい領域では, 割り当てる物理量子ビットの数に関して論理エラーの大きさが指数関数的に減少することが知られている。実用上は閾値付近の精度では不十分であり, そのような指数関数的な削減の起こる領域まで量子演算の精度を改善することが必要となる。

量子誤り訂正の導入により, 量子コンピュータの計算システムは, 物理層と論理層, それらをつなぐ誤り訂正層, そして量子アルゴリズム層という4つの階層からなる。物理層はさらに物理量子ビット層と物理演算層からなる。物理量子ビット層では, 超伝導量子ビット・半導体量子ドット・トラップされたイオン等の量子系を利用して物理量子ビットを構成する。物理演算層では, 物理量子ビットを構成する物理系の性質に合った制御手法を利用することで, 状態準備・ゲート演算・測定といった量子演算を物理量子ビットに実行する。誤り訂正層では, 物理エ

ラーの論理層への悪影響を削減するために量子誤り訂正を導入する。論理層は論理量子ビット層と論理演算層から構成される。論理量子ビットでは、量子誤り訂正符号の手法に従い、多数の物理量子ビットから論理量子ビットを構成する。論理演算層では論理量子ビット上での高精度な量子演算が構成される。量子アルゴリズム層では論理量子ビットに適切な順番で論理演算を実行していくことにより量子アルゴリズムが実行される。任意の量子アルゴリズムを実行可能な量子コンピュータを万能量子コンピュータと呼ぶ。

現在、量子コンピュータの開発は誤り訂正符号実装の途中段階にある。これまで様々な量子誤り訂正符号 [7, 8, 9] が提案されており、Google, IBM, デルフト工科大などの主要な実験グループは現在、2次元平板表面符号 [10, 11] (2D Planar Surface Code) と呼ばれる量子誤り訂正符号の実装に向けてデバイス開発を進めている。表面符号の閾値の代表的な値としては、一様な depolarizing error model で 0.75% [12]、偏りのある depolarizing error model で 1.1-1.4% [13] という値が知られている。実装が最も進んでいる超伝導量子回路で「RIMS 研究集会 量子システム推定の数理」開催時 (2016 年 10 月 26・27 日) に報告されていた物理量子ビット数は 4 (IBM [14]), 5 (IBM [15]), 5 (デルフト工科大 [16], Google [17]), 9 (Google [18]) と少数であった。これらの実験では 2次元平板表面符号の部分的な実装に留まっているため、2次元平板表面符号の完全な実装を目標に開発が進められている [19]。誤り耐性を持つ 2次元平板表面符号のうち最小のものは物理量子ビットを 17 個必要とする。この最小の表面符号の実装は量子誤り訂正の実装において重要なマイルストーンの一つに位置付けられており、各グループが実装の目標としている。先に説明したように、実用に耐えうる量子コンピュータの実装には量子誤り訂正符号の実装に加えて大規模化 (= 量子ビット数を大幅に増加する) と物理演算のさらなる高精度化が必要不可欠であることから、アメリカ [20]・ヨーロッパ [21]・オーストラリア [22] などで大規模化可能なアーキテクチャに基づいて量子誤り訂正を実行するデバイスの開発を目標とした巨額のプロジェクトが始動している。

2 最近の進展

本節では、「RIMS 研究集会 量子システム推定の数理」開催後の進展について補足する。2017 年 3 月に開催されたアメリカ物理学会において、Google, IBM, デルフト工科大, Rigetti Computing, マサチューセッツ工科大のグループから 2次元平板表面符号の実装に必要な制御線の立体配線についての報告がなされた。実装された量子ビット数は 6 (Google), 7 (IBM), 7 (デルフト工科大), 8 (Rigetti Computing), 6 (マサチューセッツ工科大) とこれまでと同程度であったが、立体配線が部分的に導入されるなど技術的な進展が報告された。デルフト工科大は量子ビット数 17, Rigetti Computing は量子ビット数 20 の実験にも着手しているとの報告がなされた。その後、2017 年 5 月に IBM は量子ビット数 16 と 17 のデバイ

スを実装したと発表した。16量子ビットのデバイスについては詳細が公開されており、誰でも利用申請をすることができる。17量子ビットのデバイスについては詳細は明かされていない。同月、Googleは量子ビット数22のデバイスの実験中であり、2017年中に量子ビット数49のデバイスの実験に着手する予定との報道がなされた。

量子状態の自由度は量子ビット数に関して指数関数的に増加する。現在実装されているデバイスでは量子ビット数が少ないため既存のコンピュータ上でデバイスの挙動をシミュレートすることが可能であるが、量子ビット数が50に近づくと、現在稼働しているスーパーコンピュータが搭載するメモリ量では量子状態を取り扱うには不足してしまい、複雑な量子アルゴリズムを実行する場合、そのようなデバイスの挙動を既存のコンピュータ上でシミュレーションすることができなくなる。GoogleとIBMは共に量子ビット数~50のデバイスの実装を数年以内の目標に掲げている。もし掲げる計画通りに進めば、スパコンではシミュレートできない規模の量子的な計算デバイスが数年以内に実現することになる。但し、実装された量子演算の精度が低いと既存の計算機でも挙動をシミュレート可能になるため、量子ビット数だけではなく、量子演算の精度も重要な指標となる。一方で、量子ビット数50程度のデバイスでは小規模すぎるため、量子系のシミュレーションを除いて、既存のコンピュータ上で通常扱っているサイズの問題を扱うことはできない。量子ビット数~50のデバイスが実現した後しばらくは、大規模化しても計算能力が「挙動が複雑すぎてスパコンでもシミュレートできないが、既存のコンピュータが扱っている問題を解くには量子ビット数が少なすぎる」という領域に留まると予想される。

3 理論的な課題

本節では量子コンピュータの実現に向けて解決すべき理論的な課題について説明する。実験的な課題については例えば[23]に詳しい。

1. 新しい量子アルゴリズムの開発

これまで様々な量子アルゴリズムが提案されているがその多くはそれなりに長時間の量子計算を必要とする。量子誤り訂正符号が実装されるまでは、そのような長時間の量子計算を実行することはできない。しかし、もしそれなりに短い量子回路で古典アルゴリズムを超える性能を発揮する量子アルゴリズムがあれば、量子誤り訂正を利用しないデバイスでも有用な計算機となりうる。これまでの量子アルゴリズムよりも短い量子回路で実行可能な量子アルゴリズムが近年提案され[24]、原理検証的な実験も行われている[24, 25]。実験技術の進展に伴い、このような新しいタイプの量子アルゴリズム開発の重要性が増加している。

2. 既存の量子アルゴリズムの改良

既存の量子アルゴリズムの中には改良の余地を残すものがあり、より実装しやすい形に改良することは重要な課題である。例えば、分子の電子構造を計算する古典アルゴリズムに配置間相互作用法と呼ばれるアルゴリズムがあり、近似を導入しない場合は扱う電子軌道数 N に対して空間計算量が指数関数的に増加する。2005 年に配置間相互作用法を空間計算量・時間計算量共に多項式的増加で実行する量子アルゴリズムが提案された [26]。その後、2014 年に時間計算量が $O(N^9)$ [27] であることが証明され、2015 年に $O(N^7)$ [28]、 $O(N^{5.5})$ [29]、 $O(N^3 Z^{2.5})$ [30] に改良された。ここで Z は分子中に含まれる原子核が持つ電荷の最大値である。分子の電子構造の解明は化学や薬学において重要な課題であり、量子シミュレーションの実用的な応用先として最も重要な例の一つである。量子アルゴリズムの効率化は実装コストの低減に繋がるため、既存の量子アルゴリズムのさらなる効率化は重要な課題の一つとなっている。

3. 量子演算を基本量子演算に分解する手法の改良

量子アルゴリズムを実行する際、実行しなければならない量子演算を複数の基本量子演算の組み合わせで実現する必要がある。基本量子演算への分解は一意ではなく、様々な分解方法が存在しうる。例えば、Shor のアルゴリズムの一部を基本量子演算に分解する方法だけでも様々な手法が提案されている [31, 32, 33, 34]。できるだけ実装コストの低い分解方法を利用するのが望ましいため、そのような効率的な分解方法の開発が重要な課題となっている。

4. 量子誤り訂正の開発と改良

現在実験で 2 次元平板表面符号の実現が目標とされている理由は、その実装のし易さ（量子ビットの空間的な配置が 2 次元平面上で済む、誤り訂正に必要となる相互作用が最近接相互作用だけでよい、復号に要求されるデータ処理が比較的容易、など）と比較的高い閾値という望ましい性質を持つためである。2 次元平板表面符号は提案されているその他の量子誤り訂正符号に比べれば確かに実装は容易である。しかしながら、符号長 d の 2 次元平板表面符号を構成するためには $(2d - 1)^2$ 個の物理量子ビットを必要とする、エラーの検出のために測定を行い続けなければいけない、万量子計算を実行するために必要となる量子ゲート全てを誤り耐性付きで用意するには magic state distillation などの（多項式的増加で済むが）高コストな手法を必要とする、等々、既存の実験技術や量子演算の精度から考えると実装に要求される技術やコストは相当高い。今後デバイスの大規模化と高精度化を進めていく上で、

- 必要となる物理量子ビットの数がより少ない。

- エラー検出のために実行する測定の頻度がより少ない。
- 閾値が高い。
- 復号に必要な古典データ処理のコストが低い。
- 万能量子計算を実行するために必要となる量子ゲートを実装するコストがより低い。

といったより良い性質を持つ新しい符号の開発や既存の符号の改良は極めて重要な課題である。

5. 量子誤り訂正における物理エラーの影響の解析

量子誤り訂正の導入によって論理エラーがどの程度小さくなるかは、符号の種類、符号のサイズ、そして物理エラーの種類とエラーの強さによって大きく異なる。符号の種類とサイズが決まっている場合（例えば、2次元平板表面符号で符号長 $d = 31$ 、など）、論理エラーの大きさは物理エラーの種類とそのエラーがどの程度の強さで発生しているかによって決まる。論理エラーの大きさを理論的に評価する既存手法には大別して2つのアプローチが存在する。一つは解析の容易な物理エラーモデルを仮定して数値シミュレーションを行うアプローチである [35]。このアプローチを便宜的に手法 A と呼ぶことにする。量子誤り訂正の数値シミュレーションを行う場合、物理エラーモデルによってはシミュレーションに要求されるメモリ量が物理量子ビット数に関して指数関数的に増加してしまうため、大きなサイズの符号を扱えない場合がある。そのような場合を避けるために解析の容易な物理エラーモデルに限定するのが手法 A であり、量子誤り訂正の性能を評価する標準的な手法となっている。物理エラーモデルとしては1量子ビットと2量子ビットの depolarizing error model と呼ばれる以下のモデルが選ばれることが多い。

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + \frac{p}{3}(X\rho X^\dagger + Y\rho Y^\dagger + Z\rho Z^\dagger), \quad (1)$$

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + \frac{p}{15}(X \otimes X\rho X^\dagger \otimes X^\dagger + X \otimes Y\rho X^\dagger \otimes Y^\dagger + \dots + Z \otimes Z\rho Z^\dagger \otimes Z^\dagger) \quad (2)$$

ここで X, Y, Z はパウリ行列である。depolarizing error model を仮定すると数値シミュレーションに必要なメモリ量と計算時間は物理量子ビット数に関して多項式的増加で済むため、数値シミュレーションを実行できる。手法 A の欠点としては、仮定する物理エラーモデルが実際に発生している物理エラーとはかけ離れている可能性があるため、シミュレーションの結果が実際の性能を正確には予想できないかもしれない、という問題がある。例えば超伝導量子回路では1量子ビットの量子ゲートはマイクロ波パルスによって実現される。その場合パルス波形のずれは物理エラーとなるが、そういった物理エラーは depolarizing error model では記述されない。また、デコヒーレンスのモデルとして知られる amplitude damping と呼ばれる物理エラーモデル

も depolarizing error model には含まれない。現在量子コンピュータ開発は量子誤り訂正符号の実装段階にあり、その実装に向けて物理量子演算の高精度化が課題となっている。量子系に生じる物理エラーには様々な自由度があり、高精度化においてどの自由度のエラーを削減すれば良いかは非自明な問題である。一般論としては、符号が苦手とする物理エラーの自由度を削減するように高精度化するのが望ましい。特定の符号に対して、その符号が具体的にどのような物理エラーを苦手とするのかを明らかにすることは、量子誤り訂正符号の実装における量子演算の高精度化において重要な課題である。

より一般の物理エラーに対する符号の性能を評価する手法として、ノイズ強度とよばれる

$$\eta := \|\mathcal{E} - \mathcal{I}\|. \quad (3)$$

で定義される量に注目し、論理エラーそのものではなく論理エラーの上限を評価するアプローチが存在する [8]。便宜上このアプローチを手法 B と呼ぶことにする。手法 B は（局所性を満たす）一般の物理エラーを扱うことができるという利点がある一方で、その一般性の代償として、符号の性能をかなり低く見積もってしまうという欠点がある。従って、現実的な物理エラーに対する符号の性能評価を実行はできても、その性能を過小評価しすぎてしまうために実際の性能とはかけ離れた結果となってしまう可能性がある。

筆者は 2014 年 10 月ごろから現実的な物理エラーに対する量子誤り訂正符号の性能評価手法の開発に取り組んでいる。藤井啓祐氏・永田晴久氏・田中冬彦氏との共同研究により、手法 B よりも精度のよい上限を導出し、その改良された上限を利用したより実用的な評価方法を開発した [36]。その評価方法を用いて 1 次元反復符号と呼ばれる符号の性能評価を行い、depolarizing error model でない物理エラーモデルに対する性能評価を数値的に行った。導出した新しい上限の評価に困難な点があるため、2 次元表面符号の性能評価を行うためには手法のさらなる改良が必要となる。また、鈴木泰成氏・藤井啓祐氏・小芦雅人氏は 1 次元反復符号において、depolarizing error model とは異なる物理モデルではあるが多項式的な計算コストの増加で数値シミュレーションする手法を提案し、その手法を用いて符号の性能評価を行なっている [37]。これらの結果から、1 次元反復符号は、パルス波形のずれのようなコヒーレンスを含む物理エラーを苦手とすることが数値的に明らかにされた。

6. 物理エラーの評価手法の改良

現在量子誤り訂正符号の実験では、Randomized Benchmarking (RB) と呼ばれる手法が、量子演算の性能評価に利用されている [38, 39, 40, 41]。RB は平均ゲート忠実度と呼ばれるゲート演算の関数の値を推定するのに特化し

た手法であり、実験データから1変数を推定する推定手法の1種である。平均ゲート忠実度は depolarizing error model のエラーの大きさを表すパラメータ p と1対1に対応する。従って、RBの結果を用いてゲート演算の精度を評価することは、ゲート演算に発生しているエラーを depolarizing error であると仮定していることとほぼ同値である。しかし、前小節で説明したように、depolarizing error model は現実的な物理エラーモデルではなく、また、量子誤り訂正符号の性能は物理エラーが depolarizing error である場合とそうでない場合で異なる。従って、量子誤り訂正符号の実装という文脈でゲート演算の精度をRBの結果だけで評価するのは不十分である。また、RBはゲート演算に特化した手法であり、状態の初期化や測定の評価することはできない。このような理由から、状態の初期化・量子ゲート・測定に生じている物理エラーを適切に評価できる手法の開発が課題となっている。

RB以外にも様々な物理エラー評価手法が提案され、実験でも利用されている。代表的な手法としては量子トモグラフィと呼ばれる手法があり、理論上は状態の初期化・量子ゲート・測定の全てに対応でき、depolarizing errorでない物理エラーも扱うことができる。しかし量子トモグラフィには「利用する量子演算の精度を一部完全に知っている」という仮定が存在し、実際の実験ではこの仮定は妥当ではない。特に量子誤り訂正の実験では閾値付近かそれ以下という高精度の量子演算が実現されている場合を扱うため、非常に微小な物理エラーを実験データから推定することが求められる。このような精度の高い推定が要求される実験で上記の仮定を導入することは妥当ではないため、量子トモグラフィの既存の手法はそのままでは推定結果の信頼性が劣るという問題がある。この問題を解決する手法として Gate-set tomography (GST) とよばれる新しいタイプの量子トモグラフィ手法が提案され [42, 43], 実験でも利用されている [44, 45]。この手法では上記の仮定を導入せずに推定を行うことが可能であるが、推定結果が非物理的になることがある(例えば、初期状態を記述する密度行列の推定結果が負の固有値を持っている、など)、扱えるゲート演算の数に制限がある、などの欠点があり、そういった欠点のない新しい統計的手法の開発が課題となっている。

7. 中規模デバイスの検証方法の開発

前述したように、量子ビット数が50付近になるとメモリの制約からスパコンでもそのようなデバイスの挙動をシミュレートすることはできなくなる。そういった中規模のデバイスが実装された場合、そのデバイスが正常に動作しているかを確かめるためにはどうしたらよいだろうか？ひとつの方法としては、解が既知の問題を解く量子アルゴリズムを実行し、計算結果が正しい解にどれくらい近いかでそのデバイスの性能を評価する、という手法である。この方法はもちろん上手くいくし、実行すべきではあるが、解が既知の問題はスパコンでも解けるはずであり、スパコンでもシミュレートできない複雑

な動作を行うデバイスの検証方法としては少々物足りない。挙動があまりに複雑であるためにスパコンでも出力結果を予測することはできない状況で、その出力結果からデバイスが正常に（高精度で）動作しているか確かめることはできないだろうか？ランダムなゲート演算の持つカオス的性質を利用した量子アルゴリズムによってそのような検証が可能であることが2016年にGoogleの研究者らによって証明された[46]。Googleは数年以内に~50量子ビットから構成されるデバイスを実装し、そのデバイス上でこの量子アルゴリズムを実行することを計画している。また、2017年3月のアメリカ物理学会ではGoogleの研究者から、この検証方法を利用してゲート演算の高精度化を行う方法の提案と9量子ビットデバイス上での原理検証実験の報告がなされた。検証だけでなく高精度化にも利用できるという点で非常に優れた手法である。このような中規模デバイスの検証方法の開発は、今後デバイス開発が進むにつれて重要性を増していくと考えられる。

8. 専門家の育成

量子コンピュータの実現に向けて、開発を担う専門家を継続して育成することは（理論の課題ではないが）極めて重要な課題である。量子コンピュータの開発は量子計算分野の一部であり、量子計算は量子情報科学の一分野である。アメリカでは量子情報科学の隆盛が著しく、2016年1月にはPhysical Review A 誌の statement of coverage に、atomic, molecular, and optical physics と並んで quantum information が追加された[47]。アメリカ物理学会（APS）では Topical Group of Quantum Information (GQI) と呼ばれるコミュニティが量子情報に関するセッションを運営している。APSの全会員数に対してGQIに所属する会員が占める割合は2016年3月で3.06%、2017年3月で3.39%と年々増加しており、これを受けて2017年5月、GQIはDivision of Quantum Information (DQI)に昇格した。GQI/DQIが運営するセッションのなかでも特に超伝導量子回路を利用した量子コンピュータ開発に関する発表は件数は多く、筆者が参加した2016年と2017年のAPS March Meetingでは5日間の学会中、ほぼ全ての時間帯で超伝導量子回路に関するセッションが開かれていた。発表者として登壇できるのは原則一人1件に制限されている（招待講演等は除く）ことを考えると、この発表数は極めて多いことがわかる。発表内容は新しい2量子ビットゲートの提案・実装、量子演算のエラーを評価する手法の提案・実装、量子演算の精度改善の報告、種々の量子アルゴリズム実装報告など幅広い。

APSでの発表件数の多さはアメリカにおける量子情報分野の研究者層の厚さを意味している。アメリカには量子情報の理論・実験の研究室が多数存在し、加えて

- Institute for Quantum Information and Matter (Caltech)

- Joint Quantum Institute (The University of Maryland, NIST, and Laboratory for Physical Sciences)
- Berkley Quantum Information & Computation Center
- Center for Quantum Information Science and Technology (University of Southern California)
- Quantum Information Center (The University of Texas at Austin)

のような量子情報に特化した研究・教育拠点が複数存在する。各研究室やこのような拠点が多数の専門家を継続して輩出し、アメリカにおける量子情報科学の隆盛を支えている。

参考文献

- [1] P. W. Shor, In *SFCS '94 Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science* (IEEE Computer Society Press, Washington, DC, 1994), p.124.
- [2] R. P. Feynman, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 467 (1982).
- [3] S. Lloyd, *Science* **273**, 1073 (1996).
- [4] I. M. Georgescu, S. Ashhab, and Franco Nori, *Rev. Mod. Phys.* **86**, 153 (2014).
- [5] A. Montanaro, *npj Quantum Information* **2**, 15023 (2016).
- [6] Quantum Algorithm Zoo, <http://math.nist.gov/quantum/zoo/>.
- [7] P. W. Shor, *Phys. Rev. A* **52**, R2493 (1995).
- [8] D. A. Lidar and T. A. Brun (eds.), “*Quantum Error Correction*”, Cambridge University Press (2013).
- [9] B. Terhal, *Rev. Mod. Phys.* **87**, 307 (2015).
- [10] S. B. Bravyi and A. Y. Kitaev, arXiv:quant-ph/9811052.
- [11] A. G. Fowler *et al.*, *Phys. Rev. A* **86**, 032324 (2012).
- [12] R. Raussendorf, J. Harrington, and K. Goyal, *New J. Phys.* **9**, 199 (2007).
- [13] D. S. Wang, A. G. Fowler, and L. C. L. Hollenberg, *Phys. Rev. A* **83**, 020302(R) (2011).
- [14] A. D. Corcoles *et al.*, *Nature Commun.* **6**, 6979 (2015).

- [15] M. Takita *et al.*: Phys. Rev. Lett. **117**, 210505 (2016).
- [16] D. Ristè *et al.*, *Nature Commun.* **6**, 6983 (2015).
- [17] R. Barends *et al.*, *Nature* **508**, 500 (2014).
- [18] J. Kelly *et al.*, *Nature* **519**, 66 (2015).
- [19] S. Benjamin and J. Kelly, *Nature Materials* **14**, 561 (2015).
- [20] IARPA LogiQ Program, <https://www.iarpa.gov/index.php/research-programs/logiq>
- [21] Quantum Manifesto, <https://ec.europa.eu/futurium/en/content/quantum-manifesto-quantum-technologies>
- [22] E. Gibney, *Nature* **533**, 448 (2016).
- [23] J. M. Gambetta, J. M. Chow, and M. Steffen, npj Quantum Information **3**, 2 (2017).
- [24] A. Peruzzo *et al.*: Nature Communications, **5**, 4213 (2014).
- [25] O ’ Malley *et al.*, Phys. Rev. X **6**, 031007 (2016).
- [26] A. Aspuru-Guzik *et al.*, Science **309**, 1704 (2005).
- [27] D. Wecker *et al.*, Phys. Rev. A **90**, 022305 (2014).
- [28] M. Hastings *et al.*, Quantum Inf. Comput. **15**, 1 (2015).
- [29] D. Poulin *et al.*, Quantum Inf. Comput. **15**, 361 (2015).
- [30] R. Babbush *et al.*, Phys. Rev. A **91**, 022311 (2015).
- [31] S. Beauregard, Quantum Inf. Comput. **3**, 175 (2003).
- [32] S. A. Cuccaro *et al.*, arXiv:quant-ph/0410184.
- [33] C. Zalka, arXiv:quant-ph/9806084.
- [34] R. Van Meter, K. M. Itoh, and T. D. Ladd, arXiv:quant-ph/0507023.
- [35] E. Dennis *et al.*, J. Math. Phys. **43**, 4452 (2001).
- [36] T. Sugiyama, K. Fujii, H. Nagata, and F. Tanaka, in preparation.
- [37] Y. Suzuki, K. Fujii, and M. Koashi, arXiv:1703.03671 [quant-ph].

- [38] J. Emerson, R. Alicki, and K. Życzkowski, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **7**, S347 (2005).
- [39] J. Emerson *et al.*, Science **317**, 1893 (2007).
- [40] E. Knill *et al.*, Phys. Rev. A **77**, 012307 (2008).
- [41] E. Magesan, J. M. Gambetta, and J. Emerson, Phys. Rev. A **85**, 042311 (2012).
- [42] R. Blume-Kohout *et al.*, arXiv:quant-ph/1310.4492.
- [43] pyGSTi: A python implementation of Gate Set Tomography, <http://www.pygsti.info/>.
- [44] K. Rudinger *et al.*, arXiv:1702.01763 [quant-ph].
- [45] S. Mavadia *et al.*, arXiv:1706.03787 [quant-ph].
- [46] S. Boixo *et al.*, arXiv:1608.00263 [quant-ph].
- [47] Editorial: Phys. Rev. A **93**, 010001 (2016).